HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MTCT CASIO – VINACAL

GIẢI NHANH BÀI TOÁN SỐ PHỨC

TÍNH NHANH CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN SỐ PHỨC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Các khái niệm thường gặp

- Đơn vị ảo là một đại lượng được kí hiệu i và có tính chất $i^2=-1$
- Số phức là một biểu thức có dạng $a+bi$ trong đó a,b là các số thực . Trong đó a được gọi là phần thực và b được gọi là số ảo
- Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức $\overline{z}=a-bi$
- Số phức nghịch đảo của số phức $z=a+bi$ là số phức $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}$
- Môdul của số phức $z=a+bi$ được kí hiệu là $|z|$ và có độ lớn $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

2. Lệnh Caso

- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh tính Môđun của số phức là SHIFT HYP
- Lệnh tính số phức liên hợp $\overline{z}$ là SHIFT 2 2
- Lệnh tính Acgument của số phức là SHIFT 2 1

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$ .Tính Môđun của số phức z_1+z_2

A. $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$ **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$ **C.** $|z_1+z_2|=1$ **D.** $|z_1+z_2|=5$

GIẢI

➢ Đăng nhập lệnh số phức MODE 2

CMPLX Math

(Khi nào máy tính hiển thị chữCMPLX thì bắt đầu tính toán số phức được)

➢ Để tính Môđun của số phức ta nhập biểu thức vào máy tính rồi sử dụng lệnh SHIFT HYP

1 + ENG + 2 − 3 ENG = SHIFT hyp Ans =

CMPLX Math ▲

1+i+2-3i

3-2i

CMPLX Math ▲

|Ans|

√13

Vậy $|z_1+z_2|=\sqrt{13}\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

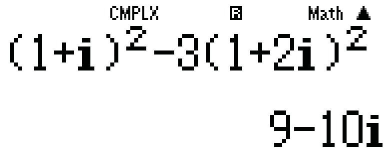
Số phức liên hợp với số phức $z=(1+i)^2-3(1+2i)^2$ là :

A. $-9-10i$ **B.** $9+10i$ **C.** $9-10i$ **D.** $-9+10i$

GIẢI

➢ Sử dụng máy tính Casio tính z

(1 + ENG) x^2 − 3 (1 + 2 ENG) x^2 =



$\Rightarrow z = 9 - 10i$

- Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi$:

  Vậy $\overline{z} = 9 + 10i \Rightarrow$ Đáp án **B** là chính xác

VD3-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^2 có phần ảo là :

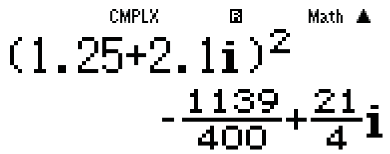
A. a^2b^2 **B.** $2a^2b^2$ **C.** $2ab$ **D.** ab

GIẢI

- Vì đề bài cho ở dạng tổng quát nên ta tiến hành "cá biệt hóa" bài toán bằng cách chọn giá trị cho a, b (lưu ý nên chọn các giá trị lẻ để tránh xảy ra trường hợp đặc biệt).

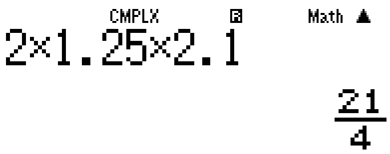
  Chọn $a = 1.25$ và $b = 2.1$ ta có $z = 1.25 + 2.1i$
- Sử dụng máy tính Casio tính z^2





Vậy phần ảo là $\frac{21}{4}$

- Xem đáp số nào có giá trị là $\frac{21}{4}$ thì đáp án đó chính xác. Ta có :



Vậy $2ab = \frac{21}{4} \Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác

VD4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

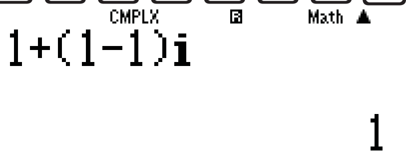
Để số phức $z = a + (a-1)i$ (a là số thực) có $|z| = 1$ thì :

A. $a = \frac{1}{2}$ **B.** $a = \frac{3}{2}$ **C.** $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$ **D.** $a = \pm 1$

GIẢI

- Để xử lý bài này ta sử dụng phép thử, tuy nhiên ta chọn a sao cho khéo léo nhất để phép thử tìm đáp số nhanh nhất. Ta chọn $a = 1$ trước, nếu $a = 1$ đúng thì đáp án đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**, nếu $a = 1$ sai thì **C** và **D** đều sai.
- Với $a = 1$ Sử dụng máy tính Casio tính z





|Ans|

1

Vậy $|z|=1 \Rightarrow$ Đáp án đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**

➢ Thử với $a=0$ Sử dụng máy tính Casio tính z :

0 + (0 − 1) ENG = SHIFT hyp Ans =

0+(0−1)i

-i

|Ans|

1

Vậy $|z|=1 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

VD5-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng – Đắc Nông lần 1 năm 2017]

Số phức $z=1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{20}$ có giá trị bằng :

A. -2^{20} **B.** $-2^{10}+\left(2^{20}+1\right)i$ **C.** $2^{10}+\left(2^{10}+1\right)i$ **D.** $2^{10}+2^{10}i$

GIẢI

➢ Nếu ta nhập cả biểu thức $1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{20}$ vào máy tính Casio thì vẫn được, nhưng mất nhiều thao tác tay. Để rút ngắn công đoạn này ta tiến hành rút gọn biểu thức
Ta thấy các số hạng trong cùng biểu thức đều có chung một quy luật "số hạng sau bằng số hạng trước nhân với đại lượng $1+i$ " vậy đây là cấp số nhân với công bội $1+i$

$$\Rightarrow 1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{20}=U_1\frac{1-q^n}{1-1}=1.\frac{1-(1-i)^{21}}{1-(1-i)}$$

➢ Với $z=\dfrac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$ Sử dụng máy tính Casio tính z

▭/▭ 1 − (1 + ENG) $x^{■}$ 2 1 ▼ 1 − (1 + ENG) =

$\dfrac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$

-1024+1025i

Ta thấy $z=-1024+1025i=-2^{10}+\left(2^{10}+1\right)i$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là**B**

VD6-[Thi thử chuyên KHTN lần 1 năm 2017]

Nếu số phức z thỏa mãn $|z|=1$ thì phần thực của $\dfrac{1}{1-z}$ bằng :

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $-\dfrac{1}{2}$ **C.** 2 **D.**Một giá trị khác

GIẢI

➢ Đặt số phức $z=a+bi$ thì Môđun của số phức z là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$

➢ Chọn $a=0.5 \Rightarrow \sqrt{0.5^2+b^2}=1$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để tìm b

MODE 1 √▭ 0 • 5 x^2 + ALPHA) x^2 ▶ − 1 SHIFT CALC 0 • 5 =

```
√0.5²+X² -1
X=   0.8660254038
L-R=            0
```

Lưu giá trị này vào b

SHIFT RCL °,,,

```
Ans→B

      0.8660254038
```

➢ Trở lại chế độ CMPLX để tính giá trị $\frac{1}{1-z}$:

MODE 2 ▼ 1 ▼ 1 − (0 • 5 + ALPHA °,,, ENG) =

```
      1
1−(0.5+Bi)
1/2+0.8660254038i
```

Vậy phần thực của z là $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

VD7-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Tìm số phức z biết rằng : $(1+i)z-2\overline{z}=-5+11i$

A. $z=5-7i$ **B.** $z=2+3i$ **C.** $z=1+3i$ **D.** $z=2-4i$

GIẢI

➢ Với $z=5-7i$ thì số phức liên hợp $\overline{z}=5+7i$. Nếu đáp án A đúng thì phương trình : $(1+i)(5-7i)-2(5+7i)=-5+11i$ (1)

➢ Sử dụng máy tính Casio nhập vế trái của (1)

(1 + ENG) (5 − 7 ENG) − 2 (5 + 7 ENG) =

```
(1+i)(5-7i)-2(5▸

          2-16i
```

Vì $2-16i\neq-5+11i$ nên đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy với đáp án **B**

(1 + ENG) (2 + 3 ENG) − 2 (2 − 3 ENG) =

```
(1+i)(2+3i)-2(2▸

         -5+11i
```

Dễ thấy vế trái (1) = vế phải (1) = $-5+11i$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD8-[Đề minh họa của bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=\frac{1}{2}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=-1$ **D.** $P=-\frac{1}{2}$

GIẢI

➢ Phương trình $\Leftrightarrow(1+i)z+2\overline{z}-3-2i=0$ (1). Khi nhập số phức liên hợp ta nhấn lệnh

SHIFT 2 2

CMPLX Math ▲
Conj(

- Sử dụng máy tính Casio nhập vế trái của (1)

(1 + ENG) ALPHA) + 2 SHIFT 2 2 ALPHA)) − 3 − 2 ENG

CMPLX Math
◀Conjg(X)−3−2i

- X là số phức nên có dạng $X = a + bi$ .Nhập $X = 1000 + 100i$ (có thể thay $a;b$ là số khác)

CALC 1 0 0 0 + 1 0 0 ENG =

CMPLX Math ▲
(1+i)X+2Conjg(X▶

2897+898i

Vậy vế trái của (1) bằng $2897 + 898i$. Ta có : $\begin{cases} 2897 = 3.1000 - 100 - 3 = 3a - b - 3 \\ 898 = 1000 - 100 - 2 = a - b - 2 \end{cases}$

Mặt khác đang muốn vế trái $= 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a - b - 3 = 0 \\ a - b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{-3}{2}$

Vậy $a + b = -1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD9-Số phức $z = \dfrac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$ có một Acgument là :

A. $\dfrac{\pi}{6}$ **B.** $\dfrac{\pi}{4}$ **C.** $\dfrac{\pi}{2}$ **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$

GIẢI

- Thu gọn z về dạng tối giản $\Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}i$

▭ 5 + 3 ENG √ 3 ▼ 1 − 2 ENG √ 3 =

CMPLX Math ▲
$\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

$-1+\sqrt{3}i$

- Tìm Acgument của z với lệnh SHIFT 2 1

SHIFT 2 1 − 1 + √ 3 ▶ ENG) =

CMPLX Math ▲
arg(−1+√3i)

$\frac{2}{3}\pi$

Vậy z có 1 Acgument là $\dfrac{2\pi}{3}$. Tuy nhiên khi so sánh kết quả ta lại không thấy có giá trị nào là $\dfrac{2\pi}{3}$.

Khi đó ta nhớ đến tính chất "Nếu góc α là một Acgument thì góc $\alpha + 2\pi$ cũng là một Acgument"

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D** vì $\dfrac{2\pi}{2} + 2\pi = \dfrac{8\pi}{3}$

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $w = (z_1)^2 . z_2$

A. $w = 6 + 4i$ **B.** $w = 6 - 4i$ **C.** $w = -6 - 4i$ **D.** $w = -6 + 4i$

Bài 2-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z=a+bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a+b$ **B.** $\frac{a}{a^2+b^2}$ **C.** $\frac{-b}{a^2+b^2}$ **D.** $a-b$

Bài 3-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 1 năm 2017]

Tìm môđun của số phức $z=2-\sqrt{3}i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}i\right)$ là :

A. $\frac{\sqrt{103}}{2}$ **B.** $\frac{3\sqrt{103}}{2}$ **C.** $\frac{5\sqrt{103}}{2}$ **D.** Đáp án khác

Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z=(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

A. -2^{11} **B.** $-2^{11}+2$ **C.** $-2^{11}-2$ **D.** 2^{11}

Bài 5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z=2-3i$. Phần ảo của số phức $w=(1+i)z-(2-i)\overline{z}$ là :

A. $-9i$ **B.** -9 **C.** -5 **D.** $-5i$

Bài 6-[Đề thi Đại học –Cao đẳng khối A năm 2009]

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. Tìm $P=2a+b$ **A.** 3

B. -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

Bài 7-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2]

Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. Tìm $P=2a+b$ **A.** 3

B. -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

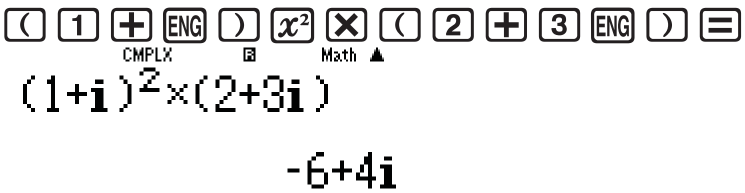
Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1=1+i, z_2=2+3i$. Tìm số phức $w=(z_1)^2.z_2$

A. $w=6+4i$ **B.** $w=6-4i$ **C.** $w=-6-4i$ **D.** $w=-6+4i$

GIẢI

- Sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 2 (CMPLX)



Vậy $w=-6+4i$ ta chọn **D** là đáp án chính xác

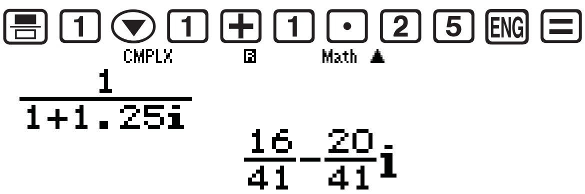
Bài 2-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z=a+bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a+b$ **B.** $\frac{a}{a^2+b^2}$ **C.** $\frac{-b}{a^2+b^2}$ **D.** $a-b$

GIẢI

- Vì đề bài mang tính chất tổng quát nên ta phải cá biệt hóa, ta chọn $a=1;b=1.25$.
- Với $z^{-1}=\frac{1}{z}$ Sử dụng máy tính Casio



Ta thấy phần thực số phức z^{-1} là : $\frac{16}{41}$ đây là 1 giá trị dương. Vì ta chọn $b > a > 0$ nên ta thấy ngay đáp số **C** và **D** sai.

Thử đáp số **A** có $a+b=1+1.25=\frac{9}{4}\neq\frac{16}{41}$ vậy đáp số A cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Bài 3-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 1 năm 2017]

Tìm môđun của số phức $z=2-\sqrt{3}i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}i\right)$ là :

A. $\frac{\sqrt{103}}{2}$ **B.** $\frac{3\sqrt{103}}{2}$ **C.** $\frac{5\sqrt{103}}{2}$ **D.** Đáp án khác

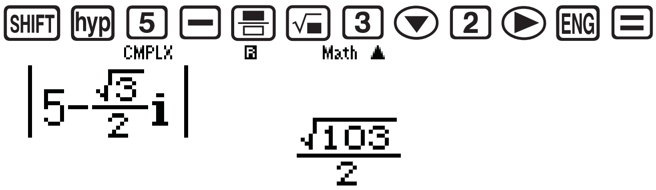
GIẢI

- Tính số phức $z=2-\sqrt{3}i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}i\right)$



Vậy $z=5-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

- Dùng lệnh SHIFT HYP tính Môđun của số phức z ta được



Vậy $|z|=\frac{\sqrt{103}}{2}$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

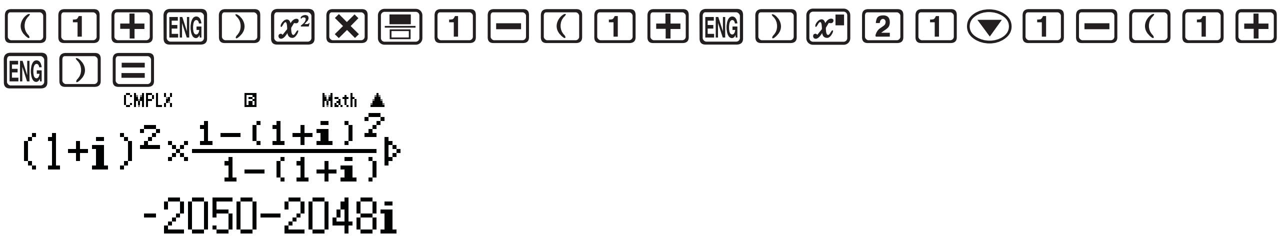
Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z=(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

A. -2^{11} **B.** $-2^{11}+2$ **C.** $-2^{11}-2$ **D.** 2^{11}

GIẢI

- Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1=(1+i)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1+i$. Thu gọn z ta được : $z=U_1.\frac{1-q^n}{1-q}=(1+i)^2.\frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$
- Sử dụng máy tính Casio tính z



Vậy $z=-2050-2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2050=-2^{11}-2$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z=2-3i$. Phần ảo của số phức $w=(1+i)z-(2-i)\bar{z}$ là :

A. $-9i$ **B.** -9 **C.** -5 **D.** $-5i$

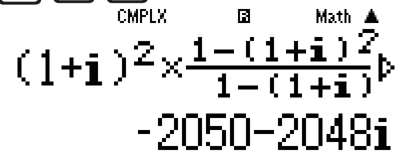
GIẢI

- Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1 = (1+i)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1+i$. Thu gọn z ta được

: $z = U_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = (1+i)^2.\dfrac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$

- Sử dụng máy tính Casio tính z

[(] [1] [+] [ENG] [)] [x^2] [×] [▭/▭] [1] [−] [(] [1] [+] [ENG] [)] [$x^{■}$] [2] [1] [▼] [1] [−] [(] [1] [+] [ENG] [)] [=]



Vậy $z = -2050 - 2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2048 = -2^{11}$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 6-[Đề thi Đại học –Cao đẳng khối A năm 2009]

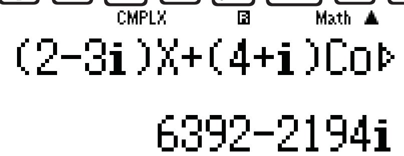
Cho số phức $z = a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z + (4+i)\overline{z} = -(1+3i)^2$ .Tìm $P = 2a+b$ **A.** 3

B. -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow (2-3i)z + (4+i)\overline{z} + (1+3i)^2 = 0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X = 1000+100i$

[(] [2] [−] [3] [ENG] [)] [ALPHA] [)] [+] [(] [4] [+] [ENG] [)] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [+] [(] [1] [+] [3] [ENG] [)] [x^2] [CALC] [1] [0] [0] [0] [+] [1] [0] [0] [ENG] [=]



Vậy vế trái $= 6392 - 2194i$ với $\begin{cases} 6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8 \\ 2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6 \end{cases}$

- Để vế trái $= 0$ thì $\begin{cases} 6a + 4b - 8 = 0 \\ 2a + 2b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2; b = 5$

Vậy $z = -2 + 5i \Rightarrow P = 2a + b = 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 7-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2]

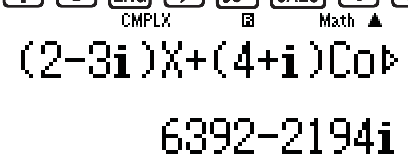
Cho số phức $z = a+bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z + (4+i)\overline{z} = -(1+3i)^2$. Tìm $P = 2a+b$ **A.** 3

B. -1 **C.** 1 **D.** Đáp án khác

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow (2-3i)z + (4+i)\overline{z} + (1+3i)^2 = 0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X = 1000+100i$

[(] [2] [−] [3] [ENG] [)] [ALPHA] [)] [+] [(] [4] [+] [ENG] [)] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [+] [(] [1] [+] [3] [ENG] [)] [x^2] [CALC] [1] [0] [0] [0] [+] [1] [0] [0] [ENG] [=]



Vậy vế trái $= 6392 - 2194i$ với $\begin{cases} 6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8 \\ 2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6 \end{cases}$

BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Các khái niệm thường gặp

- Hệ trục thực ảo gồm có 2 trục vuông góc với nhau : Trục nằm ngang là trục thực, trục đứng dọc là trục ảo
- Số phực $z = a + bi$ khi biểu diễn trên hệ trục thực ảo là điểm $M(a;b)$
- Môđun của số phức $z = a + bi$ là độ lớn của vecto $\overrightarrow{OM}$

2. Lệnh Caso

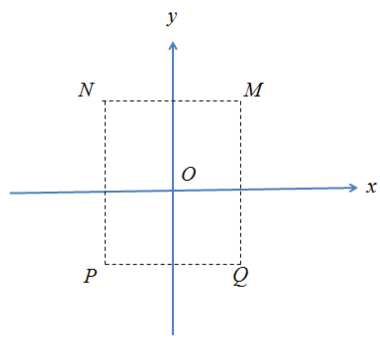
- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3
- Lệnh giải phương trình bậc ba MODE 5 4

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 31 Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3 - i$. Hỏi điểm biểu diễn số phức z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q

A.điểm P **B.**điểm Q **C.**điểm M **D.**điểm N



GIẢI

➢ Cô lập $z = \dfrac{3-1}{1+i}$

Sử dụng máy tính Casio trong môi trường CMPLX để tìm z



$$\frac{3-i}{1+i}$$

$$1-2i$$

$\Rightarrow z = 1 - 2i$ và điểm biểu diễn z trong hệ trục thực ảo có tọa độ $(1;-2)$. Điểm có thực dương và ảo âm sẽ nằm ở góc phần tư thứ IV

$\Rightarrow$ Điểm phải tìm là Q và đáp án chính xác là **B**

VD2-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Điểm biểu diễn số phức $z = 7 + bi$ với $b \in R$, nằm trên đường thẳng có phương trình là :

A. $x = 7$ **B.** $y = x$ **C.** $y = x + 7$ **D.** $y = 7$

GIẢI

➢ Điểm biểu diễn số phức $z = 7 + bi$ là điểm M có tọa độ $M(7;b)$

Ta biết điểm M thuộc đường thẳng d nếu tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình đường thẳng d

➢ Thử đáp án A ta có $x = 7 \Leftrightarrow 1.x + 0.y - 7 = 0$. Thế tọa độ điểm M vào ta được : $1.7 + 0.b - 7 = 0$ (đúng)

Vậy điểm M thuộc đường thẳng $x = 7 \Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

VD3-[Thi thử Group Nhóm toán – Facebook lần 5 năm 2017]

Các điểm M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức

$z_1 = \dfrac{4i}{i-1}$; $z_2 = (1-i)(1+2i)$; $z_3 = -1 + 2i$

A. Tam giác vuông **B.**Tam giác cân **C.**Tam giác vuông cân **D.**Tam giác đều

GIẢI

- Rút gọn z_1 bằng Casio

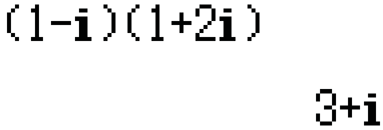




Ta được $z_1 = 2-2i$ vậy điểm $M(2;-2)$

- Rút gọn z_2 bằng Casio

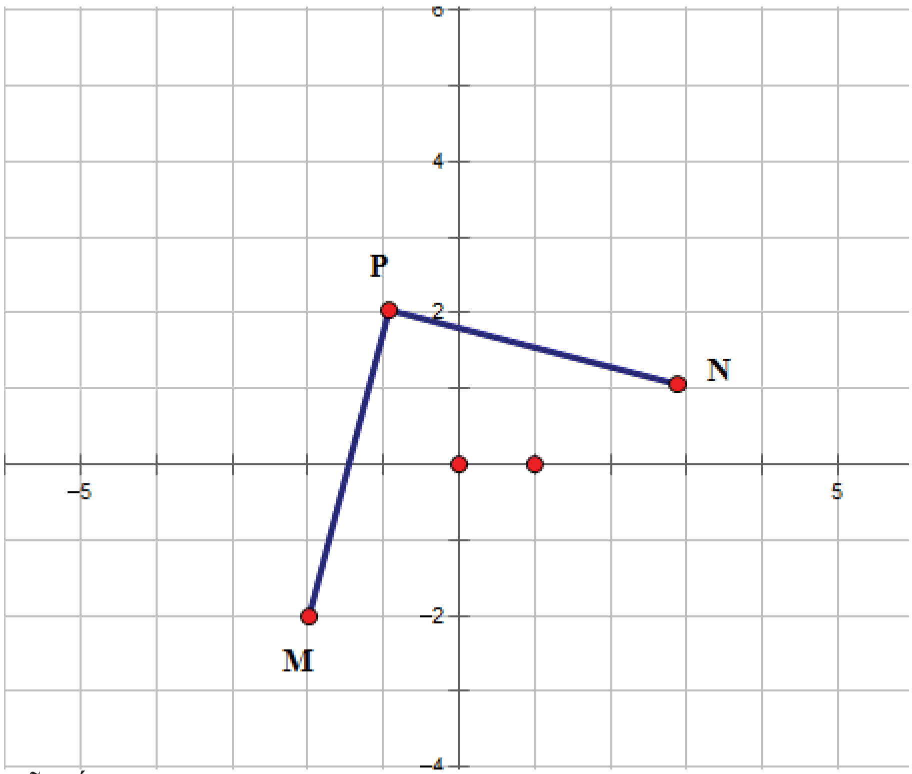




Ta được $z_2 = 3+i$ vậy điểm $N(3;1)$

Tương tự $z_2 = -1+2i$ và điểm $P(-1;2)$

- Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M, N, P trên hệ trục tọa độ



Dễ thấy tam giác MNP vuông cân tại P $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

VD4-[Thi thử báo Toán học Tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy, gọi các điểm M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 1-\text{i}, z_2 = 3+2i$. Gọi G là trọng tâm tam giác OMN , với O là gốc tọa độ. Hỏi G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây.

A. $5-i$ **B.** $4+i$ **C.** $\frac{4}{3}+\frac{1}{3}i$ **D.** $2+\frac{1}{2}i$

GIẢI

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 1-i \Rightarrow$ tọa độ $M(1;-1)$

  Điểm N biểu diễn số phức $z_2 = 3+2i \Rightarrow$ tọa độ $N(3;2)$

  Gốc tọa độ $O(0;0)$

➢ Tọa độ điểm $G\left(\frac{x_M+x_N+x_O}{3};\frac{y_M+y_N+y_O}{3}\right)=\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

Vậy G là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{3}+\frac{1}{3}i \Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

VD5-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=3-4i$, điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z'=\frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$

A. $S_{\Delta OMM'}=\frac{25}{4}$ **B.** $S_{\Delta OMM'}=\frac{25}{2}$ **C.** $S_{\Delta OMM'}=\frac{15}{4}$ **D.** $S_{\Delta OMM'}=\frac{15}{2}$

GIẢI

➢ Điểm M biểu diễn số phức $z_1=3-4i \Rightarrow$ tọa độ $M(3;-4)$

Điểm M' biểu diễn số phức $z'=\frac{1+i}{2}z \Rightarrow$ tọa độ $N\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$

[□] [1] [+] [ENG] [▼] [2] [▶] [×] [(] [3] [−] [4] [ENG] [)] [=]

$\frac{1+i}{2}\times(3-4i)$

$\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$

Gốc tọa độ $O(0;0)$

➢ Để tínhdiện tích tam giác OMM' ta ứng dụng tích có hướng của 2 vecto trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm O, M, M' là xong

$\overrightarrow{OM}(3;-4;0)$, $\overrightarrow{OM'}\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|$

Tính $\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|$

[MODE] [8] [1] [1] [3] [=] [−] [4] [=] [0] [=] [SHIFT] [5] [1] [2] [1] [7] [÷] [2] [=] [−] [1] [÷] [2] [=] [0] [=] [AC] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [=]

VctA·VctB

12.5

Vậy $\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|=12.5=\frac{25}{2} \Rightarrow S_{OMM'}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right|=\frac{25}{4}$

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

VD6-[Đề thi minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=iz_0$

A. $M\left(\frac{1}{2};2\right)$ **B.** $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{4};1\right)$ **D.** $M\left(\frac{1}{4};1\right)$

GIẢI

➢ Sử dụng lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3 để giải phương trình $4z^2-16z+17=0$

[MODE] [5] [3] [4] [=] [−] [1] [6] [=] [1] [7] [=] [=] [=]

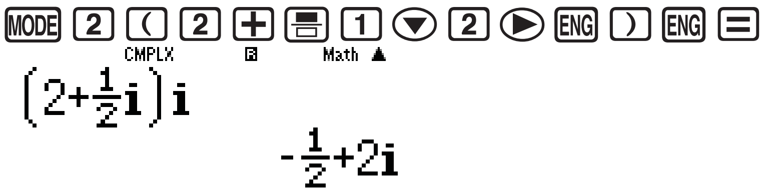
$X_1=$

$2+\frac{1}{2}i$



Vậy phương trình $4z^2-16z+17=0$ có hai nghiệm $z=2+\frac{1}{2}i$ và $z=2-\frac{1}{2}i$

- Để z_0 có phần ảo dương $\Rightarrow z=2-\frac{1}{2}i$. Tính $w=z_0 i$



Vậy phương trình $w=-\frac{1}{2}+2i \Rightarrow$ Điểm biểu diễn số phức w là $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

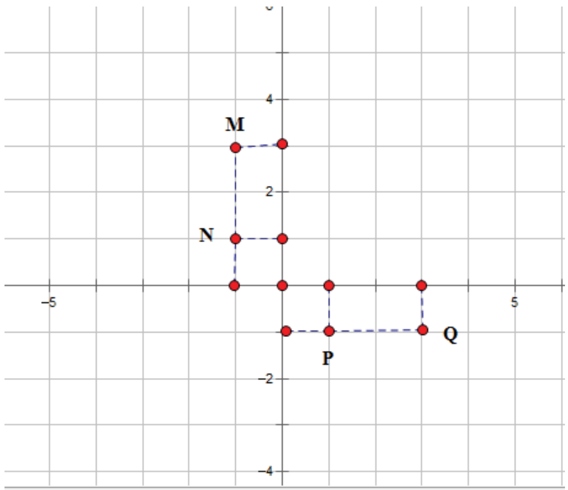
II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z=2+i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w=(1-i)z$

A.Điểm M **B.**Điểm N

C.Điểm P **D.** Điểm Q

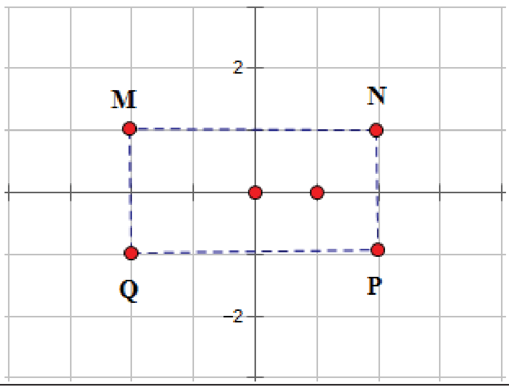


Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z=4z+5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M,N,P,Q ở hình bên .

A.Điểm N **B.**Điểm P

C.Điểm M **D.** Điểm Q



Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{4}{-\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{5}i}$,

$(1-i)(1+2i)$, $-2i^3$ Khi đó tam giác ABC

A.Vuông tại C **B**.Vuông tại A **C**.Vuông cân tại B **D**. Tam giác đều

Bài 4-Các điểm A,B,C, A',B',C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số : $1-i,2+3i,3+i$ và

$3i,3-2i,3+2i$ có G,G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. G trùng G' **B**. Vecto $\overrightarrow{GG'}=(1;-1)$

C. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GA'}$ **D**. Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

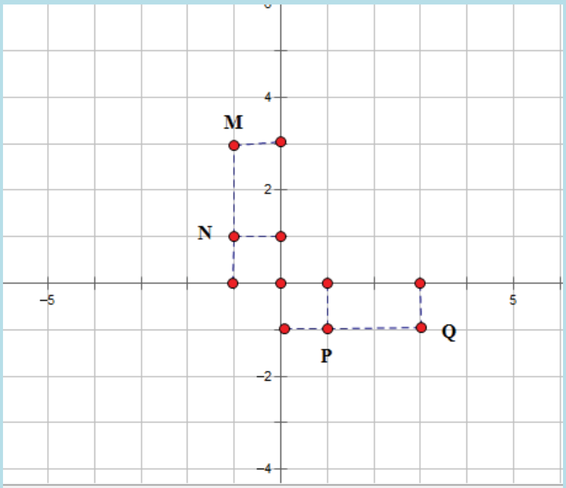
LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z=2+i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w=(1-i)z$

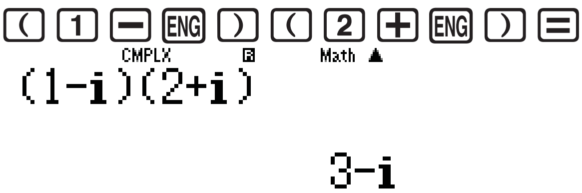
A.Điểm M **B**.Điểm N

C.Điểm P **D**. Điểm Q



GIẢI

- Tính số phức $w=(1-i)z$ bằng máy tính Casio



Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức w là $(3;-1)$. Đây là tọa độ điểm Q

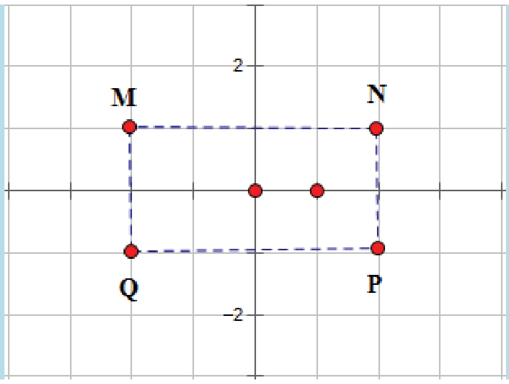
$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z=4z+5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M,N,P,Q ở hình bên .

A.Điểm N **B**.Điểm P

C.Điểm M **D**. Điểm Q



GIẢI

- Cô lập $(2-i)z-4z=5 \Leftrightarrow -(2+i)z=5 \Leftrightarrow z=\dfrac{-5}{2+i}$
- Tìm số phức $z=\dfrac{-5}{2+i}$





Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức z là $(-2;1)$. Đây là tọa độ điểm M

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{4}{-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i}$, $(1-i)(1+2i)$, $-2i^3$ Khi đó tam giác ABC

A. Vuông tại C **B.** Vuông tại A **C.** Vuông cân tại B **D.** Tam giác đều

GIẢI

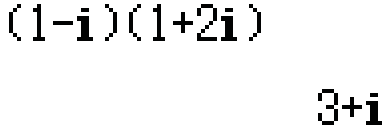
- Rút gọn $\dfrac{4}{-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i}$ được $-2-4i$ vậy tọa độ điểm $A(-2;-4)$



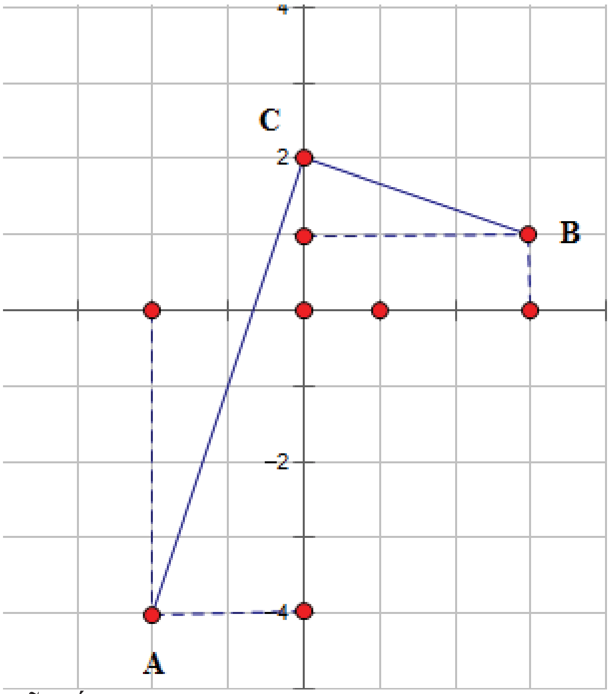


- Rút gọn $(1-i)(1+2i)$ được $3+i$ vậy tọa độ điểm $B(3;1)$





- Rút gọn $-2i^3=-2i.i^2=2i$ vậy tọa độ điểm $C(0;2)$
- Để phát hiện tính chất của tam giác ABC ta chỉ cần biểu diễn trên hệ trục tọa độ là thấy ngay



Dễ thấy tam giác ABC vuông tại C

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 4-Các điểm A, B, C, A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số : $1-i, 2+3i, 3+i$ và $3i, 3-2i, 3+2i$ có G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. G trùng G' **B.** Vecto $\overrightarrow{GG'} = (1;-1)$

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA'}$ **D.** Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

GIẢI

- Ta có tọa độ các đỉnh $A(1;-1)$, $B(2;3)$, $C(3;1)$ $\Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G(2;1)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \end{cases}$$

- Ta có tọa độ các đỉnh $A'(0;3)$, $B'(3;-2)$, $C'(3;2)$ $\Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G(2;1)$

$$\begin{cases} x_{G'} = \dfrac{x_{A'} + x_{B'} + x_{C'}}{3} = 2 \\ y_{G'} = \dfrac{y_{A'} + y_{B'} + y_{C'}}{3} = 1 \end{cases}$$

Rõ ràng $G \equiv G' \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MTCT CASIO – VINACAL

QUỸ TÍCH ĐIỂM BIỂU DIỄN CỦA SỐ PHỨC

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Mẹo giải nhanh

- Bài toán quỹ tích luôn đi lên từ định nghĩa. Ta luôn đặt $z = x + yi$, biểu diễn số phức theo yêu cầu đề bài, từ đó khử i và thu về một hệ thức mới :
- Nếu hệ thức có dạng $Ax + By + C = 0$ thì tập hợp điểm là đường thẳng
- Nếu hệ thức có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ thì tập hợp điểm là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R
- Nếu hệ thức có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì tập hợp điểm có dạng một Elip
- Nếu hệ thức có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì tập hợp điểm là một Hyperbol
- Nếu hệ thức có dạng $y = Ax^2 + Bx + C$ thì tập hợp điểm là một Parabol

2. Phương pháp Caso

- Tìm điểm đại diện thuộc quỹ tích cho ở đáp án rồi thế ngược vào đề bài, nếu thỏa mãn thì là đúng

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-2-i| = |\bar{z}+2i|$

A. $4x-2y+1=0$ **B.** $4x-2y-1=0$ **C.** $4x+2y-1=0$ **D.** $4x-6y-1=0$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

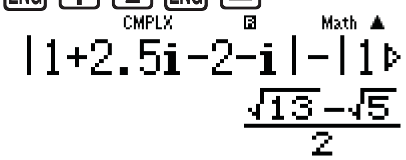
➢ Gọi số phức z có dạng $z = a + bi$. Ta hiểu : điểm M biểu diễn số phức z thì M có tọa độ $M(a;b)$.

Giả sử đáp án **A** đúng thì M thuộc đường thẳng $4x-2y+1=0$ thì $4a-2b+1=0$

Chọn $a=1$ thì $b=\frac{5}{2} \Rightarrow z = 1+2.5i$. Số phức z thỏa mãn $|z-2-i| = |\bar{z}+2i|$ thì $|z-2-i| - |\bar{z}+2i| = 0$

➢ Sử dụng máy tính Casio để kiểm tra

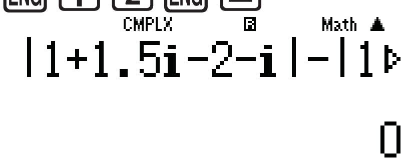
SHIFT hyp 1 + 2 . 5 ENG − 2 − ENG ▶ − SHIFT hyp 1 − 2 . 5 ENG + 2 ENG =



Ta thấy ra một kết quả khác 0 vậy $|z-2-i| - |\bar{z}+2i| = 0$ là sai và đáp án **A** sai

➢ Tương tự với đáp số B chọn $a=1$ thì $b=1.5$ và $z=1+1.5i$

SHIFT hyp 1 + 1 . 5 ENG − 2 − ENG ▶ − SHIFT hyp 1 − 1 . 5 ENG + 2 ENG =



Ta thấy kết quả ra 0 vậy $\left|z-2-i\right|-\left|\bar{z}+2i\right|=0$ là đúng và đáp án chính xác là **B**

❖ **Cách mẹo**

➢ Đặt $z=x+yi$ (ta luôn đi lên từ định nghĩa) .

➢ Thế vào $\left|z-2-i\right|=\left|\bar{z}+2i\right|$ ta được

$$\left|(x-2)+(y-1)i\right|=\left|x^2+(-y+2)i\right|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(-y+2)^2}$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=x^2+(-y+2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=x^2+y^2-4y+4$$
$$\Leftrightarrow 4x-2y-1=0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $4x-2y-1=0$

$\Rightarrow$ đáp án **B** là chính xác

❖ **Bình luận**

➢ Trong dạng toán này ta nên ưu tiên dùng mẹo vì tính nhanh gọn của nó

➢ Nhắc lại một lần nữa, luôn đặt $z=x+yi$ rồi biến đổi theo đề bài

VD2-[Thi thử sở GD-ĐT Hà Tĩnh lần 1 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $\left|2+z\right|=\left|1-i\right|$. Chọn phát biểu đúng

A.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng
B.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường Parabol
C.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn
D.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường Elip

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

➢ Đặt $z=x+yi$.

➢ Thế vào $\left|2+z\right|=\left|1-i\right|$ ta được

$$\left|x+2+yi\right|=\left|1-i\right|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2;0)$ bán kính $R=\sqrt{2}$

Vậy đáp án **C** là chính xác

VD3-[Đề thi minh họa của bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

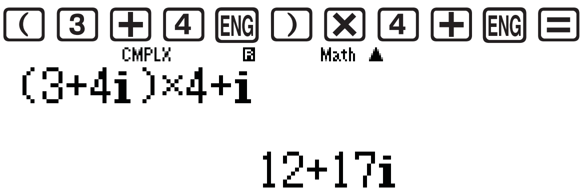
A. $r=4$ **B.** $r=5$ **C.** $r=20$ **D.** $r=22$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

➢ Để xây dựng 1 đường tròn ta cần 3 điểm biểu diễn của w , vì z sẽ sinh ra w nên đầu tiên ta sẽ chọn 3 giá trị đại diện của z thỏa mãn $\left|z\right|=4$

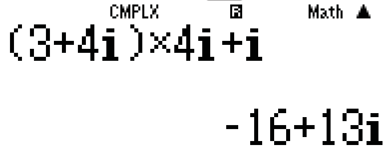
➢ Chọn $z=4+0i$ (thỏa mãn $\left|z\right|=4$). Tính $w_1=(3+4i)(4+0i)+i$



Ta có điểm biểu diễn của z_1 là $M(12;17)$

➢ Chọn $z = 4i$ (thỏa mãn $|z| = 4$). Tính $w_2 = (3+4i)(4i)+i$

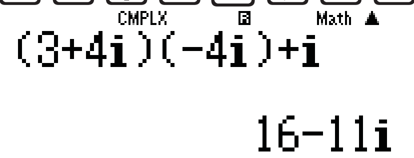
(3 + 4 ENG) × 4 ENG + ENG =



Ta có điểm biểu diễn của z_2 là $N(-16;13)$

➢ Chọn $z = -4i$ (thỏa mãn $|z| = 4$). Tính $w_3 = (3+4i)(-4i)+i$

(3 + 4 ENG) (− 4 ENG) + ENG =



Ta có điểm biểu diễn của z_3 là $P(16;-11)$

Vậy ta có 3 điểm M, N, P thuộc đường tròn biểu diễn số phức w

➢ Đường tròn này sẽ có dạng tổng quát $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Để tìm a, b, c ta sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 5 3

➢ MODE 5 2 1 2 = 1 7 = 1 = − 1 2 x^2 − 1 7 x^2 = − 1 6 = 1 3 = 1 = − 1 6 x^2 − 1 3 x^2 = 1 6 = − 1 1 = 1 = − 1 6 x^2 − 1 1 x^2 = =







Vậy phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 - 2y - 399 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 20^2$

Bán kính đường tròn tập hợp điểm biểu diễn số phức w là 20 $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

❖ **Cách mẹo**

➢ Đề bài yêu cầu tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức w vậy ta đặt $w = x + yi$.

➢ Thế vào $w = (3+4i)z + i \Leftrightarrow z = \dfrac{w-i}{3+4i} = \dfrac{x+(y-1)i}{3+4i}$. Tiếp tục rút gọn ta được

$$z = \frac{\left[x+(y-1)i\right](3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3x+4y-4+(-4x+3y-3)i}{25}$$

$$|z| = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{3x+4y-4}{25}\right)^2 + \left(\frac{-4x+3y-3}{25}\right)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{25x^2+25y^2+25-50y}{25^2} = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 399$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 20^2$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn bán kính $r = 20$

$\Rightarrow$ đáp án **C** là chính xác

❖ **Bình luận**

- Chức năng MODE 5 2 để tìm phương trình đường tròn được giải thích như sau :
  Đường tròn có dạng $x^2+y^2+ax+by+c=0$
  Với M thuộc đường tròn thì $12a+17b+c=-12^2-17^2$
  Với N thuộc đường tròn thì $-16a+13b+c=-16^2-13^2$
  Với P thuộc đường tròn thì $16a-11b+c=-16^2-11^2$
  Vậy ta lập được hệ phương trình 3 ẩn bậc nhất $\begin{cases}12a+17b+c=-12^2-17^2\\-16a+13b+c=-16^2-13^2\\16a-11b+c=-16^2-11^2\end{cases}$
  Và ta sử dụng chức năng giải hệ phương trình 3 ẩn bậc nhất MODE 5 2 để xử lý
- Hai cách đều hay và có ưu điểm riêng, tự luận sẽ tiết kiệm thời gian một chút nhưng việc tính toán rút gọn dễ nhầm lẫn, còn casio có vẻ bấm máy nhiều hơn nhưng tuyệt đối không sai.

VD4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn phần thực của $\frac{z-1}{z-i}$ bằng 0 là đường tròn tâm I bán kính R (trừ đi một điểm)

A. $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{1}{2}$ **D.** $I\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $R=\frac{1}{2}$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**
- Đặt $z=x+yi$.
- Thế vào $\frac{z-1}{z-i}$ ta được $\frac{x-1+yi}{x+(y-1)i}=\frac{(x-1+yi)\left[x-(y-1)i\right]}{\left[x+(y-1)i\right]\left[x-(y-1)i\right]}$
  $=\frac{x^2-x+y^2-y+xyi-(x-1)(y-1)i}{x^2+(y-1)^2}$
  Để phần thực của $\frac{z-1}{z-i}$ bằng 0 thì $x^2-x+y^2-y=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
  Vậy tập hợp điểm cần tìm là đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ đáp án **B** là chính xác

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $4x+6y-3=0$ **B.** $4x-6y-3=0$ **C.** $4x+6y+3=0$ **D.** $4x-6y+3=0$

Bài 2-[Thi thử THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z : $|z|=|\overline{z}-3+4i|$ là phương trình có dạng

A. $6x+8y-25=0$ **B.** $3x+4y-3=0$ **C.** $x^2+y=25$

D. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

Bài 3-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=20$ **B.** $r=\sqrt{20}$ **C.** $r=\sqrt{7}$ **D.** $r=7$

Bài 4-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1|=|(1+i)z|$

A.Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

A.Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

A.Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

A.Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

Bài 5-[Thi thử THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z|^2=z^2$ là :

A.Cả mặt phẳng **B**.Đường thẳng **C**.Một điểm **D**.Hai đường thẳng

Bài 6-Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z-\bar{z}+2i|$ là một Parabol có dạng:

A. $y=3x^2-6x+2$ **B**. $y=\frac{x^2}{2}-x$ **C**. $y=\frac{x^2}{3}-4$ **D**. $y=x^2+2x+\frac{1}{3}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $4x+6y-3=0$ **B**. $4x-6y-3=0$ **C**. $4x+6y+3=0$ **D**. $4x-6y+3=0$

GIẢI

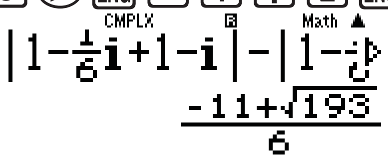
❖ **Cách 1: Casio**

- Giả sử đáp án A đúng, điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ thuộc đường thẳng $4x+6y-3=0$

  Chọn $x=1$ thì $y=-\frac{1}{6}$ và số phức $z=1-\frac{1}{6}i$.

- Xét hiệu $|z+1-i|-|z-1+2i|$. Nếu hiệu trên $=0$ thì đáp án **A** đúng. Để làm việc này ta sử dụng máy tính Casio

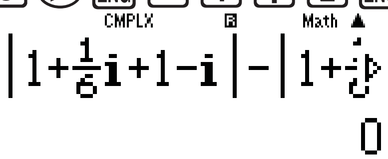
SHIFT hyp 1 − [phân số] 1 ▼ 6 ▶ ENG + 1 − ENG ▶ − SHIFT hyp 1 − [phân số] 1 ▼ 6 ▶ ENG − 1 + 2 ENG =



Hiệu trên khác 0 vậy đáp án **A** sai

- Thử với đáp án B. Chon $x=1$ thì $y=\frac{1}{6}$ và số phức $x=1+\frac{1}{6}i$. Xét hiệu :

SHIFT hyp 1 + [phân số] 1 ▼ 6 ▶ ENG + 1 − ENG ▶ − SHIFT hyp 1 + [phân số] 1 ▼ 6 ▶ ENG − 1 + 2 ENG =



Vậy hiệu $|z+1-i|-|z-1+2i|=0 \Leftrightarrow |z+1-i|=|z-1+2i| \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

❖ **Cách 2: Tự luận**

- Vì đề bài yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z nên ta đặt $z=x+yi$
- Theo đề bài $|z+1-i|=|z-1+2i|$ $|x+1+(y-1)i|=|x-1+(y+2)i|$

  $\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+4y+4$

$\Leftrightarrow 4x-6y-3=0$. Vậy đáp án chính xác là **B**

Bài 2-[Thi thử THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z : $|z|=|\bar{z}-3+4i|$ là phương trình có dạng

A. $6x+8y-25=0$ **B.** $3x+4y-3=0$ **C.** $x^2+y=25$

D. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$

GIẢI

- Đặt số phức $z=x+yi$.

Ta có : $|z|=|\bar{z}-3+4i| \Leftrightarrow |x+yi|=|x-3+(4-y)i| \Leftrightarrow x^2+y^2=(x-3)^2+(4-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2-6x+9+y^2-8y+16 \Leftrightarrow 6x+8y-25=0$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng $6x+8y-25=0$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

Bài 3-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

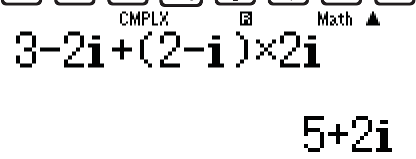
A. $r=20$ **B.** $r=\sqrt{20}$ **C.** $r=\sqrt{7}$ **D.** $r=7$

GIẢI

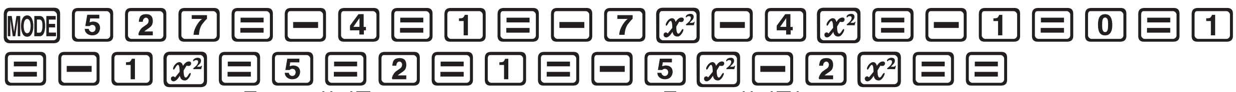
❖ **Cách 1: Casio**

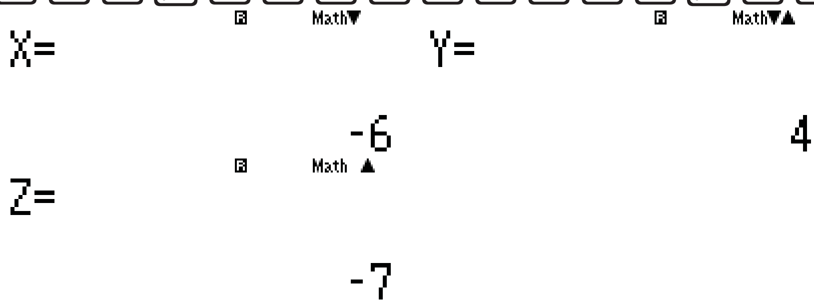
- Chọn số phức $z=2$ thỏa mãn $|z|=2$ vậy $w_1=3-2i+(2-i).2=7-4i$. Ta có điểm biểu diễn của w_1 là $M(7;-4)$
- Chọn số phức $z=-2$ thỏa mãn $|z|=2$ vậy $w_2=3-2i+(2-i).(-2)=-1+0i$. Ta có điểm biểu diễn số phức w_2 là $N(-1;0)$
- Chọn số phức $z=2i$ thỏa mãn $|z|=2$ vậy $w_3=3-2i+(2-i).(2i)=5+2i$. Ta có điểm biểu diễn số phức w_3 là $P(5;2)$





- Sử dụng máy tính tìm phương trình đường tròn di qua 3 điểm M,N,P





Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-6x+4y-7=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=(\sqrt{20})^2$ sẽ có bán kính là $r=\sqrt{20}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

❖ **Cách 2: Tự luận**

- Vì đề bài yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w nên ta đặt $w=x+yi$
- Theo đề bài $w=3-2i+(2-i)z \Rightarrow z=\dfrac{w-3+2i}{2-i}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{x-3+(y+2)i}{2-i}=\dfrac{[x-3+(y+2)i](2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{2x-y-8+(x+2y+1)}{3}$

- Ta có $|z|=2 \Rightarrow \left(\dfrac{2x-y-8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{x+2y+1}{5}\right)^2=4$

$\Leftrightarrow (2x-y-8)^2+(x+2y+1)^2=100$

$\Leftrightarrow 5x^2+5y^2-30x+20y+65=100$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+4y=7$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{20}\right)^2$

Bài 4-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1|=|(1+i)z|$

A.Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

A.Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

A.Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$

A.Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

GIẢI

- Đặt số phức $z=x+yi$.
- Ta có : $|z-1|=|(1+i)z| \Leftrightarrow |x+yi-1|=|(x+yi)(1+i)| \Leftrightarrow |x-1+yi|=|x-y+(x+y)i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x-y)^2+(x+y)^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2=x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

Bài 5-[Thi thử THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z|^2=z^2$ là :

A.Cả mặt phẳng **B.**Đường thẳng **C.**Một điểm **D.**Hai đường thẳng

GIẢI

- Đặt số phức $z=x+yi$.
- Ta có $|z|^2=z^2 \Leftrightarrow |x+yi|^2=(x+yi)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+2xyi+(yi)^2$

$2y^2-2xyi=0 \Leftrightarrow y(y-xi) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y-ix=0 \end{array}\right.$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là hai đường thẳng $y=0$ và $y-ix=0$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

Bài 6-Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z-\overline{z}+2i|$ là một Parabol có dạng:

A. $y=3x^2-6x+2$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{2}-x$ **C.** $y=\dfrac{x^2}{3}-4$ **D.** $y=x^2+2x+\dfrac{1}{3}$

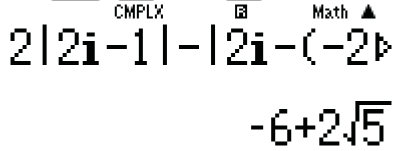
GIẢI

- Đặt số phức $z=x+yi$.
- Nếu đáp số A đúng thì đúng với mọi $z=x+yi$ thỏa mãn $y=3x^2-6x+2$.

  Chọn một cặp $(x;y)$ bất kì thỏa $y=3x^2-6x+2$ ví dụ $A(0;2)\Rightarrow z=2i$

  Xét hiệu $2|z-1|-|z-\overline{z}+2i|$

  2 SHIFT hyp 2 ENG − 1 ▶ − SHIFT hyp 2 ENG − (− 2 ENG) + 2 ENG =

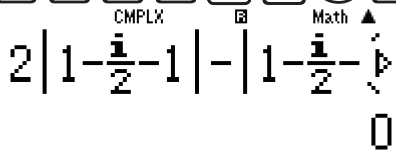


  Vậy $2|z-1|-|z-\overline{z}+2i|=-6+2\sqrt{5}\neq 0$

  $\Rightarrow 2|z-1|\neq|z-\overline{z}+2i|\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự với đáp số B chọn $z=1-\dfrac{1}{2}i$. Xét hiệu $2|z-1|-|z-\overline{z}+2i|$

  2 SHIFT hyp 1 − ▭/▭ ENG ▼ 2 ▶ − 1 ▶ − SHIFT hyp 1 − ▭/▭ ENG ▼ 2 ▶ − (1 + ▭/▭ ENG ▼ 2 ▶) + 2 ENG =



  Vậy $2|z-1|-|z-\overline{z}+2i|=0\Rightarrow 2|z-1|=|z-\overline{z}+2i|\Rightarrow$ Đáp số **B** chính xác

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Bất đẳng thức thường gặp

- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki** :Cho các số thực a,b,x,y ta luôn có

  $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

- **Bất đẳng thức Vectơ** : Cho 2 vecto $\vec{u}(x;y)$ và $\vec{v}(x';y')$ ta luôn có $|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |\overrightarrow{u+v}|$

  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2} \ge \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$

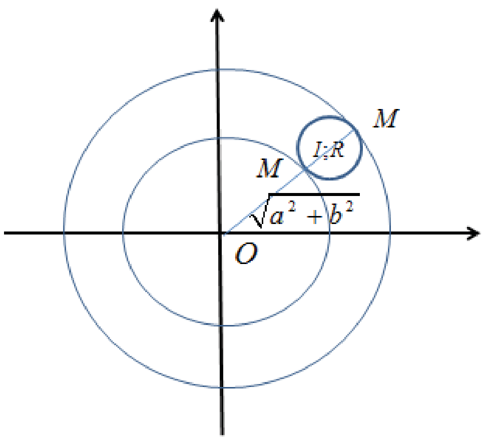
  Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}<0$

2. Phương pháp mẹo sử dụng sử tiếp xúc

- **Dạng 1**: Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) bán kính R. Với mỗi điểm M thuộc đường tròn (C) thì cũng thuộc đường tròn (C') tâm gốc tọa độ bán kính $OM=\sqrt{a^2+b^2}$.

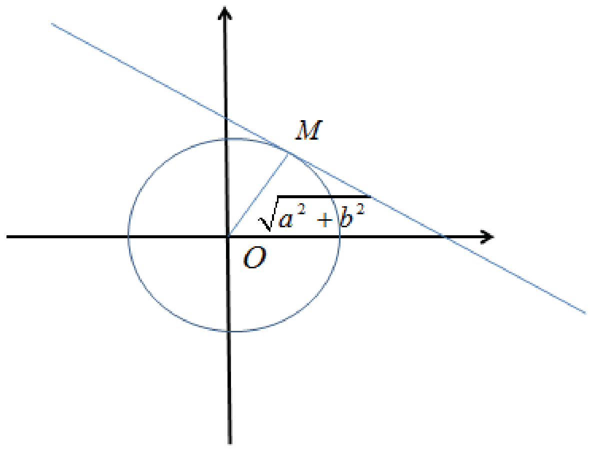
  +)Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất đạt được khi đường tròn (C') tiếp xúc trong với đường tròn (C) và $OM=OI+R$

  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất đạt được khi đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) và $OM=OI-R$



- **Dạng 2** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng (d) . Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (C')

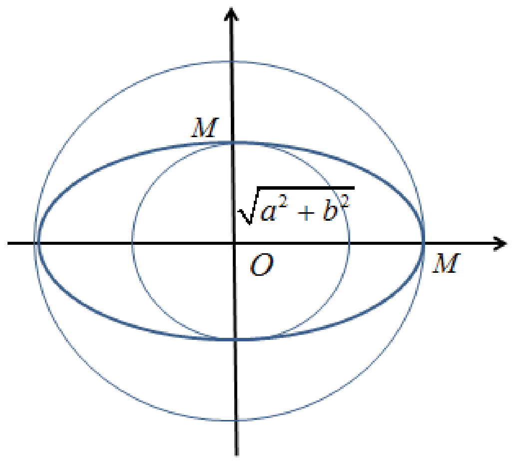
  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó OM vuông góc với (d) và $OM=d(O;(d))$



- **Dạng 3** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là Elip có đỉnh thuộc trục lớn $A(a;0)$ và đỉnh thuộc trục nhỏ $B(0;b)$. Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (E)

  +)Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và $\max|z| = OM = OA$

  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và $\max|z| = OM = OB$



- **Dạng 4** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là Hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đỉnh thuộc trục thực $A'(-a;0), A(a;0)$ thì số phức z có môđun nhỏ nhất nếu điểm biểu diễn số phức z này trùng với các đỉnh trên. (môđun lớn nhất không tồn tại)

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=-1+i$ **B**. $z=-2+2i$ **C**. $z=2+2i$ **D**. $z=3+2i$

GIẢI

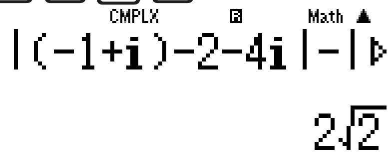
❖ **Cách Casio**

➢ Trong các số phức ở đáp án, ta sẽ tiến hành xắp xếp các số phức theo thứ tự môđun tăng dần : $|-1+i| < |-2+2i| = |2+2i| < |3+2i|$

➢ Tiếp theo sẽ tiến hành thử nghiệm từng số phức theo thứ tự môđun tăng dần, số phức nào thỏa mãn hệ thức điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ đầu tiên thì là đúng

Với $z=-1+i$ Xét hiệu : $|(-1+i)-2-4i|-|(-1+i)-2i|$

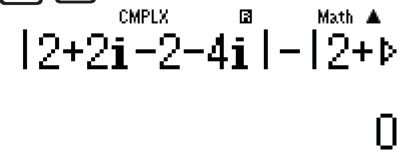
SHIFT hyp (− 1 + ENG) − 2 − 4 ENG ▶ − SHIFT hyp − 1 + ENG − 2 ENG =



Ra một giá trị khác 0 vậy $z=-1+i$ không thỏa mãn hệ thức. $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy với $z=2+2i$

SHIFT hyp 2 + 2 ENG − 2 − 4 ENG ▶ − SHIFT hyp 2 + 2 ENG − 2 ENG =



Vậy số phức $z=2+2i$ thỏa mãn hệ thức $\Rightarrow$ Đáp số **C** là đáp số chính xác

❖ **Cách mẹo**

Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow |a-2+(b-4)i|=|a+(b-2)i|$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-4)^2=a^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-8b+16=a^2+b^2-4b+4$

$\Leftrightarrow 4a+4b=16$

$\Leftrightarrow a+b-4=0$

Trong các đáp án chỉ có đáp án **C** thỏa mãn $a+b-4=0 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

❖ **Cách tự luận**

Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow |a-2+(b-4)i|=|a+(b-2)i|$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-4)^2=a^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-8b+16=a^2+b^2-4b+4$

$\Leftrightarrow 4a+4b=16$

$\Leftrightarrow a+b=4$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$16=(a+b)^2\le(1^2+1^2)(a^2+b^2)\Rightarrow |z|^2=a^2+b^2\ge 8$

$\Rightarrow |z|\ge 2\sqrt{2}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{1}=\frac{b}{1}\\ a+b=4\end{cases} \Leftrightarrow a=b=2 \Rightarrow z=2+2i$

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Với các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max|z|=4$ **B.** $\max|z|=3$ **C.** $\max|z|=7$ **D.** $\max|z|=6$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|(a+bi)(1+i)+1-7i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|a-b+1+(a+b-7)i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2+(a+b-7)^2=2$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+50-12a-16b=2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b+25=1$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R=1$. Ta gọi đây là đường tròn (C)

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z=a+bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2+b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C') , Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì O,I,M thẳng hàng (như hình) và (C') tiếp xúc trong với (C)

Khi đó $OM=OI+R=5+1=6$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|(a+bi)(1+i)+1-7i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|a-b+1+(a+b-7)i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2+(a+b-7)^2=2$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+50-12a-16b=2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b+25=1$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1$

- Ta có $|z|^2=a^2+b^2=6a+8b-24=6(a-3)+8(b-4)+26$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có : $6(a-3)+8(b-4)\le\left|6(a-3)+8(b-4)\right|$

$\le\sqrt{(6^2+8^2)\left[(a-3)^2+(b-4)^2\right]}=10$

Vậy $|z|^2\le 36\Leftrightarrow |z|\le 6$

$\Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

❖ **Bình luận**

- Việc sử dụng bất đẳng thức để đánh giá $|z|$ là rất khó khăn, đòi hỏi học sinh phải nắm rất vững bất đẳng thức Bunhiacopxki và các biến dạng của nó
- Trong tình huống của bài toán này, khi so sánh 2 cách giải ta thấy dùng mẹo tiếp xúc tỏ ra đơn giản dễ hiểu và tiết kiệm thời gian hơn.

VD3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là :

A.10 và 4 **B.** 5 và 4 **C.** 4 và 3**D.** 5 và 3

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$

$\Leftrightarrow |a-4+bi|+|a+4+bi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}=10-\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow a^2+8a+16+b^2=100+a^2-8a+16+b^2-20\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{(a-4)^2+b^2}=100-16a$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{(a-4)^2+b^2}=25-4a$

$\Leftrightarrow 25\left(a^2-8a+16+b^2\right)=625-200a+16a^2$

$\Leftrightarrow 9a^2+25b^2=225$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{9}=1$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường Elip đỉnh thuộc đáy lớn là $A(5;0)$, đỉnh thuộc đáy nhỏ là $B(0;3)$

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z=a+bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2+b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C') , Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và $M\equiv A(5;0)\Rightarrow OM=5$

  $\Rightarrow \max|z|=5$
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và $M\equiv B(0;3)\Rightarrow OM=3$

  $\Rightarrow \min|z|=3$

  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$

  $\Leftrightarrow |a-4+bi|+|a+4+bi|=10$

  $\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

  $\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}+\sqrt{(-a+4)^2+(-b)^2}=10$

  Theo bất đẳng thức vecto ta có :

  $\Leftrightarrow 10=\sqrt{(a+4)^2+b^2}+\sqrt{(-a+4)^2+(-b)^2}\geq\sqrt{\left[(a+4)-(-a+4)\right]^2+\left[b-(-b)\right]^2}$

  $\Leftrightarrow 10\geq\sqrt{4a^2+4b^2}$

  $\Leftrightarrow 10\geq 2|z|\Rightarrow |z|\leq 5$
- Ta có $\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

  Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

  $100=\left(\sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}\right)^2\leq\left(1^2+1^2\right)\left[(a-4)^2+b^2+(a+4)^2+b^2\right]$

  $\Leftrightarrow 100\leq 2\left(2a^2+2b^2+32\right)$

  $\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+32\geq 50$

  $\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 9$

  Vậy $|z|^2\geq 9\Leftrightarrow |z|\leq 3$

  $\Rightarrow 3\leq|z|\leq 5\Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

VD4-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2|-|z+2|=2$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=1-\sqrt{3}i$ **B.** $z=-1+\sqrt{3}i$ **C.** $z=1$ **D.** $z=\sqrt{3}+i$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

➢ Gọi số phức z có dạng $z=x+yi$. z thỏa mãn $|z-2|-|z+2|=2$

$\Leftrightarrow |x-2+yi|-|x+2+yi|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=2+\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$

$\Leftrightarrow -1-2x=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\ \left(-1-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 1+4x+4x^2=x^2+4x+4+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là Hypebol $(H): x^2-\frac{y^2}{3}=1$ có 2 đỉnh thuộc thực là $A'(-1;0), B(1;0)$

➢ Số phức $z=x+yi$ có điểm biểu diễn $M(x;y)$ và có môđun là $OM=\sqrt{a^2+b^2}$. Để OM đạt giá trị nhỏ nhất thì M trùng với hai đỉnh của (H)

$M\equiv A\Rightarrow M(1;0)\Rightarrow z=1$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z-2+2i|=1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

A. $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích z_1z_2 là bao nhiêu

A. 25 **B.** –25 **C.** 16 **D.** –16

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z-2+2i|=1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

A. $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|2z-2+2i|=1\Leftrightarrow |2x-2+2yi+2i|=1$

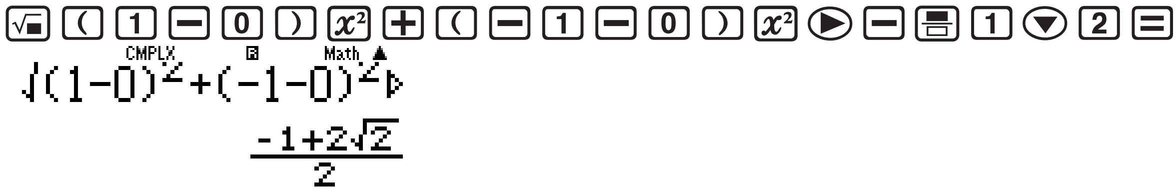
$\Leftrightarrow (2x-2)^2+(2y+2)^2=1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ bán kính $R=\frac{1}{2}$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R'=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Vì vậy để $R=|z|$ nhỏ nhất thì đường tròn (C') phải tiếp xúc ngoài với đường (C')

Khi đó điểm M sẽ là tiếp điểm của đường tròn (C) và (C') và $|z|=OM=OI-R=\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích z_1z_2 là bao nhiêu

A. 25 **B.** -25 **C.** 16 **D.** -16

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$

$\Leftrightarrow |x+(y-3)i|+|y+3+xi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(y+3)^2+x^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(y+3)^2+x^2}=10-\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

$\Leftrightarrow (y+3)^2+x^2=100-20\sqrt{x^2+(y-3)^2}+x^2+(y-3)^2$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2+(y-3)^2}=100-12y$

$\Leftrightarrow 25x^2+16y^2=400$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường Elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ có 2 đỉnh thuộc trục nhỏ là $A(-4;0), A'(4;0)$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R'=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Vì elip (E) và đường tròn (C) có cùng tâm O nên để OM nhỏ nhất thì M là đỉnh thuộc trục nhỏ

$\Rightarrow M\equiv A'\Rightarrow z_1=-4$, $M\equiv A\Rightarrow z_2=4$

Tổng hợp $z_1.z_2=(-4).4=-16$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Mở rộng**

- Nếu đề bài hỏi tích z_1z_2 với $|z_1|,|z_2|$ có giá trị lớn nhất thì hai điểm M biểu diễn hai số phức trên là hai đỉnh thuộc trục lớn $B(0;-5), B'(0;5)$

$\Rightarrow M \equiv B' \Rightarrow z_1 = -5i$, $M \equiv A \Rightarrow z_2 = 5i$

Tổng hợp $z_1z_2 = 5i.(-5i) = -25i^2 = 25$

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$

$\Leftrightarrow |-y-3+xi| = |x-2+(y-1)i|$

$\Leftrightarrow (-y-3)^2 + x^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 + x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 100 - 12y$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $(d): x + 2y + 1 = 0$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thì $|z| = OM \geq OH$ với H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d) và OH là khoảng cách từ điểm O lên đường thẳng (d)

Tính $OH = d(O;(d)) = \frac{|1.0 + 2.0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $|z| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

$$\left|x + yi + \frac{1}{x + yi}\right| = \left|\frac{x^2 - y^2 + 1 + 2xyi}{x + yi}\right| = \left|\frac{x^3 - xy^2 + x + x^2yi + y^3i - yi + 2xy^2}{x^2 + y^2}\right|$$

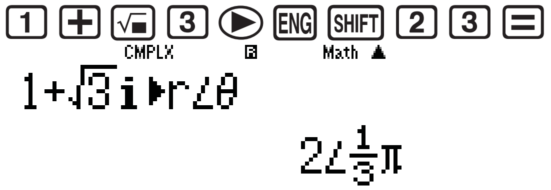
PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Chuyển số phức về dạng lượng giác

- **Dạng lượng giác của số phức** : Cho số phức z có dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì ta luôn có :
  $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
- Lệnh chuyển số phức $z = a + bi$ về dạng lượng giác : Lệnh SHIFT 2 3
  Bước 1: Nhập số phức $z = a + bi$ vào màn hình rồi dùng lệnh SHIFT 2 3 (Ví dụ $z = 1 + \sqrt{3}i$)



Bước 2: Từ bảng kết quả ta đọc hiểu $r = 2$ và $\varphi = \frac{\pi}{3}$

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

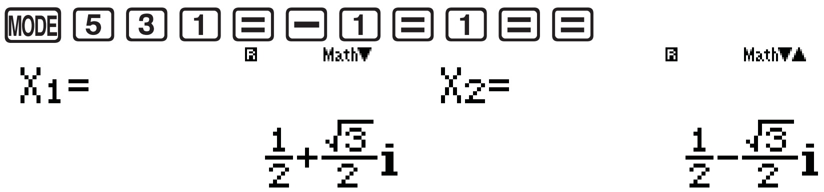
Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng :

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

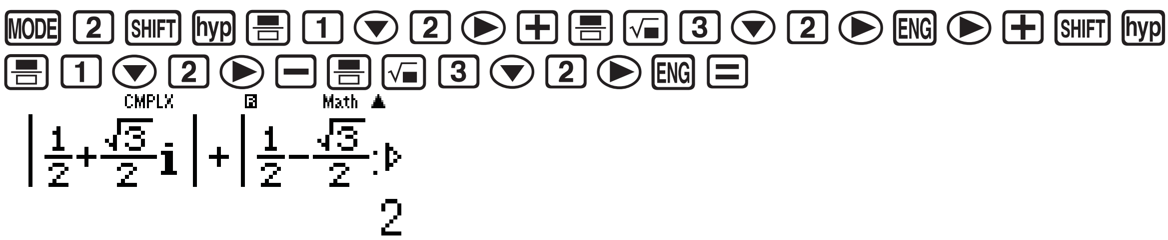
GIẢI

❖ **Cách Casio**

➢ Tính nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - z + 1 = 0$ bằng chức năng MODE 5 3



➢ Vậy ta được hai nghiệm $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tính tổng Môđun của hai số phức trên ta lại dùng chức năng SHIFT HYP



$\Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2$ ta thấy **B** là đáp án chính xác

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^{2016} + z_2^{2016}$:

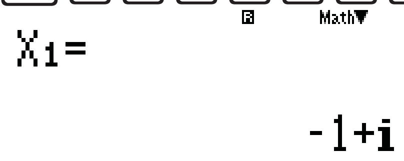
A. 2^{1009} **B.** 0 **C.** 2^{2017} **D.** 2^{1008}

GIẢI

❖ **Cách Casio 1**

- Tính nghiệm của phương trình bậc hai $z^2+2z+2=0$ bằng chức năng MODE 5 3

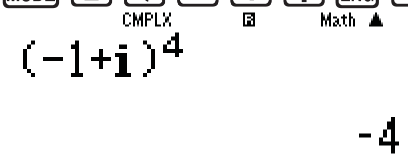
MODE 5 3 1 = 2 = 2 = =





- Ta thu được hai nghiệm $z_1=-1+i$ và $z_2=-1-i$. Với các cụm đặc biệt $-1+i$, $-1-i$ ta có điều đặc biệt sau: $(-1+i)^4=-4$, $(-1-i)^4=-4$

MODE 2 (− 1 + ENG) $x^■$ 4 =



Vậy $P=z_1^{2016}+z_2^{2016}=(-1+i)^{2016}+(-1-i)^{2016}=\left[(-1+i)^4\right]^{504}+\left[(-1-i)^4\right]^{504}$

$=(-4)^{504}+(-4)^{504}=4^{504}+4^{504}=2^{1008}+2^{1008}=2.2^{1008}=2^{1009}$

$P=z_1^{2016}+z_2^{2016}=2^{1009}$ ta thấy **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách Casio 2**

- Ngoài cách sử dụng tính chất đặc biệt của cụm $(-1\pm i)^4$ ta có thể xử lý $-1\pm i$ bằng cách đưa về dạng lượng giác bằng lệnh SHIFT 2 3

Với $z_1=-1+i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

− 1 + ENG SHIFT 2 3 =

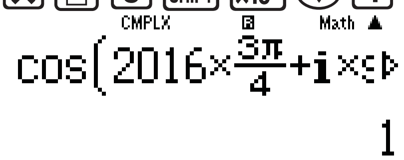


Ta nhận được $r=\sqrt{2}$ và góc $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow z_1^{2016}=\left(\sqrt{2}\right)^{2016}\left(\cos 2016.\dfrac{3\pi}{4}+i\sin 2016.\dfrac{3\pi}{4}\right)$

- Tính $\cos\left(2016.\dfrac{3\pi}{4}\right)+i.\sin\left(2016.\dfrac{3\pi}{4}\right)$

cos 2 0 1 6 × ▭ 3 SHIFT ×10ˣ ▼ 4 ▶ + ENG × sin 2 0 1 6 × ▭ 3 SHIFT ×10ˣ ▼ 4 ▶)) DEL =



$z_1^{2016}=\left(\sqrt{2}\right)^{2016}=2^{1008}$

- Tương tự $z_2^{2016}=2^{1008}\Rightarrow T=2^{1009}$

VD3-[Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Kí hiệu z_1,z_2,z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-z^2-12=0$. Tính tổng :

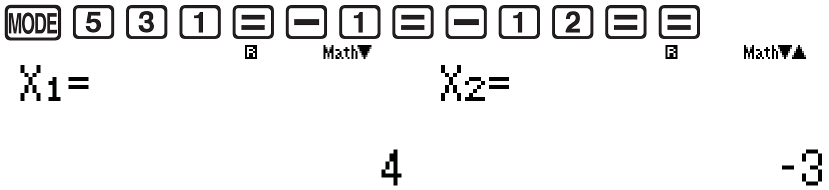
$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

A. $T=4$ **B.** $T=2\sqrt{3}$ **C.** $T=4+2\sqrt{3}$ **D.** $T=2+2\sqrt{3}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

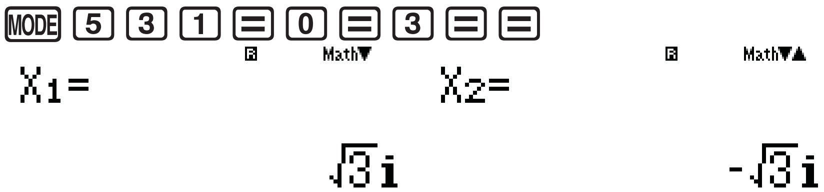
➢ Để tính nghiệm của phương trình ta dùng chức năng MODE 5. Tuy nhiên máy tính chỉ tính được phương trình bậc 2 và 3 nên để tính được phương trình bậc 4 trùng phương $z^4 - z^2 - 12 = 0$ thì ta coi $z^2 = t$ khi đó phương trình trở thành $t^2 - t - 12 = 0$



Vậy $\left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -3 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} z^2 = 4 \\ z^2 = -3 \end{array}\right.$

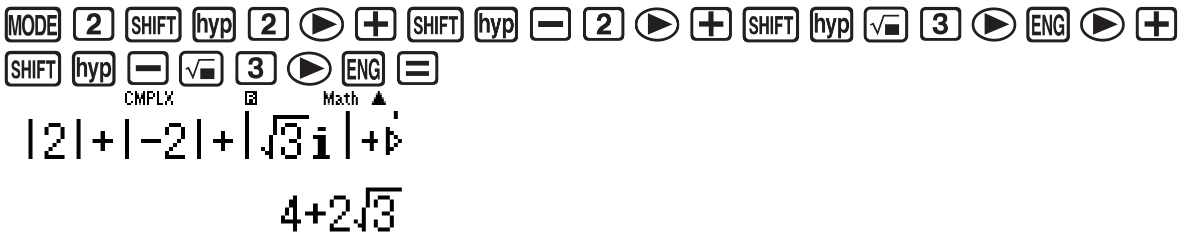
➢ Với $z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$

➢ Với $z^2 = -3$ ta có thể đưa về $z^2 = 3i^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}i$ với $i^2 = -1$. Hoặc ta có thể tiếp tục sử dụng chức năng MODE 5 cho phương trình $z^2 = -3 \Leftrightarrow z^2 + 3 = 0$



Tóm lại ta sẽ có 4 nghiệm $z = \pm 1, z = \pm\sqrt{3}i$

➢ Tính T ta lại sử dụng chức năng tính môđun SHIFT HYP



$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

VD4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

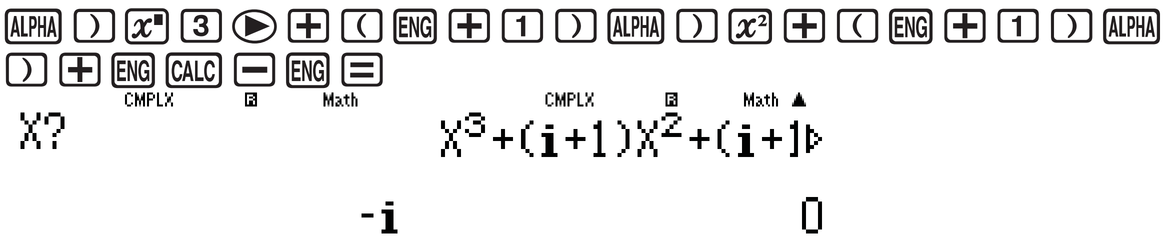
Giải phương trình sau trên tập số phức : $z^3 + (i+1)z^2 + (i+1)z + i = 0$

A. $z = -i$ **B.** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **C.** $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **D.** Cả **A**, **B**, **C** đều đúng

GIẢI

❖ **Cách Casio**

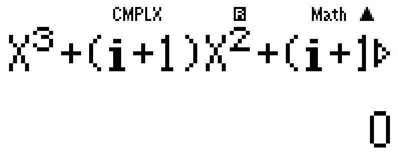
➢ Để kiểm tra nghiệm của 1 phương trình ta sử dụng chức năng CALC



Vậy $z = -i$ là nghiệm

➢ Tiếp tục kiểm tra $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ nếu giá trị này là nghiệm thì cả đáp án **A** và **B** đều đúng có nghĩa là đáp án **D** chính xác. Nếu giá trị này không là nghiệm thì chỉ có đáp án **A** đúng duy nhất.





Vậy $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ tiếp tục là nghiệm có nghĩa là đáp án **A** và **B** đều đúng

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

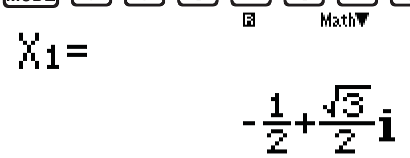
➢ Để giải phương trình số phức xuất hiện số i trong đó ta không thể sử dụng chức năng MODE 5 được mà phải tiến hành nhóm nhân tử chung

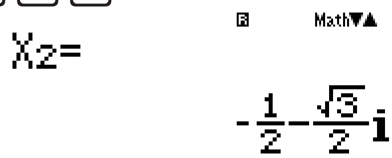
Phương trình $\Leftrightarrow z^3+z^2+z+\left(z^2+z+1\right)i=0$

$$\Leftrightarrow (z+i)\left(z^2+z+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-i \\ z^2+z+1=0 \end{array}\right.$$

➢ Phương trình $z^2+z+1=0$ không chứa số i nên ta có thể sử dụng máy tính Casio với chức năng giải phương trình MODE 5

MODE 5 3 1 = 1 = 1 = =





Tóm lại phương trình có 3 nghiệm $z=-i\,;z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,;z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

VD5-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào có hai nghiệm $z_1=1+\sqrt{3}\,;z_2=1-\sqrt{3}$

A. $z^2+i\sqrt{3}z+1=0$ **B**. $z^2+2z+4=0$ **C**. $z^2-2z+4=0$ **D**. $z^2-2z-4=0$

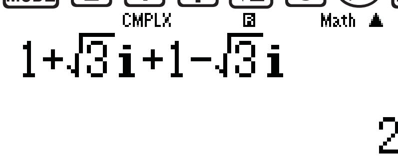
GIẢI

➢ Ta hiểu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ nếu có hai nghiệm thì sẽ tuân theo định lý Vi-et (kể cả trên tập số thực hay tập số phức)

$$\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{b}{a} \\ z_1z_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$

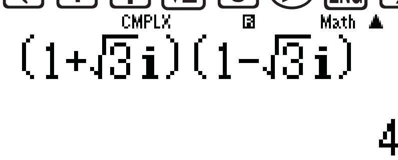
➢ Tính $z_1+z_2=2$

MODE 2 1 + √■ 3 ▶ ENG + 1 − √■ 3 ▶ ENG =



Tính $z_1z_2=4$

(1 + √■ 3 ▶ ENG) (1 − √■ 3 ▶ ENG) =



Rõ ràng chỉ có phương trình $z^2-2z+4=0$ có $-\frac{b}{a}=2$ và $\frac{c}{a}=4$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

VD6-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Phương trình $z^2+iz+1=0$ có bao nhiêu nghiệm trong tập số phức :

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Vô số

GIẢI

- Ta phân biệt : Trên tập số thực phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ sẽ có hai nghiệm phân biệt nếu $\Delta>0$, có hai nghiệm kép nếu $\Delta=0$, vô nghiệm nếu $\Delta<0$. Tuy nhiên trên tập số phức phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có 1 nghiệm duy nhất nếu $\Delta=0$, có hai nghiệm phân biệt nếu $\left[\begin{array}{l}\Delta>0\\ \Delta<0\end{array}\right.$
- Vậy ta chỉ cần tính Δ là xong. Với phương trình $z^2+iz+1=0$ thì $\Delta=i^2-4=-5$ là một đại lượng <0 vậy phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt

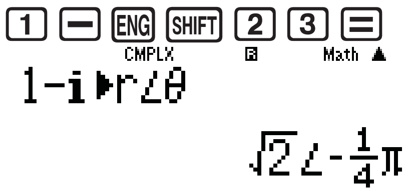
$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD7-Phần thực của số phức z là bao nhiêu biết $z=\dfrac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$

A. $-1+i$ **B.** 1 **C.** $3-2i$ **D.** $2^5 i$

GIẢI

- Để xử lý số phức bậc cao (>3) ta sử đưa số phức về dạng lượng giác và sử dụng công thức Moa-vơ . Và để dễ nhìn ta đặt $z=\dfrac{z_1^{10}.z_2^5}{z_3^{10}}$
- Tính $z_1=1-i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Để tính r và φ ta lại sử dụng chức năng SHIF 2 3



Vậy $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4}+i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$ $z_1^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos 10.\dfrac{-\pi}{4}+i\sin 10.\dfrac{-\pi}{4}\right)$

Tính $\cos 10.\dfrac{-\pi}{4}+i\sin 10.\dfrac{-\pi}{4}$



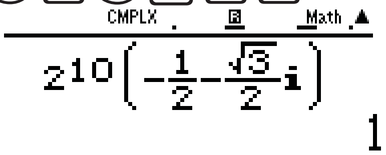
Vậy $z_1^{10}=\left(\sqrt{2}\right)^{10}.i=2^5.i$

- Tương tự $z_2^5=2^5\left(\cos 5.\dfrac{\pi}{6}+i\sin 5.\dfrac{\pi}{6}\right)=2^5\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$z_3^{10}=2^{10}\left(\cos 10.\dfrac{-2\pi}{3}+i\sin 10.\dfrac{-2\pi}{3}\right)=2^{10}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Tổng hợp $z=\dfrac{z_1^{10}.z_2^5}{z_3^{10}}=\dfrac{2^5 i.2^5\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)}{2^{10}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$

[▭/▭] [2] [x■] [5] [▶] [ENG] [×] [2] [x■] [5] [▶] [(] [−] [▭/▭] [√■] [3] [▼] [2] [▶] [+] [▭/▭] [1] [▼] [2] [▶] [ENG] [)] [▼] [2] [x■] [1] [0] [▶] [(] [−] [▭/▭] [1] [▼] [2] [▶] [−] [▭/▭] [√■] [3] [▼] [2] [▶] [ENG] [)] [=]



Vậy $z=1\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho phương trình $z^2-2z+17=0$ có hai nghiệm phức z_1 và z_2 . Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ là :

A. $2\sqrt{17}$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $2\sqrt{15}$

Bài 2-[Đề thi toán Đại học – Cao đẳng khối A năm 2009]

Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$

A. $2\sqrt{10}$ **B.** 20 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $10\sqrt{3}$

Bài 3-[Thi thử Group Nhóm toán lần 5 năm 2017]

Kí hiệu z_1,z_2,z_3 là nghiệm của phương trình $z^3+27=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|$

A. $T=0$ **B.** $T=3\sqrt{3}$ **C.** $T=9$ **D.** $T=3$

Bài 4-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4-3z^2-2=0$. Tính tổng sau :

$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

A. 5 **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

Bài 5-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Xét phương trình $z^3=1$ trên tập số phức . Tập nghiệm của phương trình là :

A. $S=\{1\}$ **B.** $S=\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$ **C.** $S=\left\{1;-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **D.** $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Bài 6-Biết z là nghiệm của phương trình $z+\dfrac{1}{z}=1$. Tính giá trị biểu thức $P=z^{2009}+\dfrac{1}{z^{2009}}$

A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-\dfrac{5}{2}$ **D.** $P=\dfrac{7}{4}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho phương trình $z^2-2z+17=0$ có hai nghiệm phức z_1 và z_2 . Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ là :

A. $2\sqrt{17}$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $2\sqrt{15}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Tìm hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+17=0$

[MODE] [5] [3] [1] [=] [−] [2] [=] [1] [7] [=] [=]

X1= 1+4i   X2= 1−4i

- Tính tổng hai môđun bằng lệnh SHIFT HYP

MODE 2 SHIFT hyp 1 + 4 ENG ▶ + SHIFT hyp 1 − 4 ENG =

|1+4i|+|1−4i|

$2\sqrt{17}$

Vậy $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{17} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2-[Đề thi toán Đại học – Cao đẳng khối A năm 2009]

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$

A. $2\sqrt{10}$ **B.** 20 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $10\sqrt{3}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Tìm hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$

MODE 5 3 1 = 2 = 1 0 = =

X1= −1+3i   X2= −1−3i

- Tính tổng bình phương hai môđun bằng lệnh SHIFT HYP

MODE 2 SHIFT hyp − 1 + 3 ENG ▶ x^2 + SHIFT hyp − 1 − 3 ENG ▶ x^2 =

|−1+3i|²+|−1−3i▸

20

Vậy $A=|z_1|^2+|z_2|^2=20 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 3-[Thi thử Group Nhóm toán lần 5 năm 2017]

Kí hiệu z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3+27=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|$

A. $T=0$ **B.** $T=3\sqrt{3}$ **C.** $T=9$ **D.** $T=3$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Tính nghiệm của phương trình $z^3+27=0$ bằng chức năng MODE 5 4

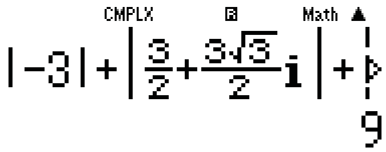
MODE 5 4 1 = 0 = 0 = 2 7 = =

X1= −3   X2= $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ X3= $\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Vậy $z_1=-3, z_2=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i, z_3=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

- Tính tổng môđun $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|$

MODE 5 4 1 = 0 = 0 = 2 7 = = = = MODE 1 MODE 2 SHIFT hyp − 3 ▶ + SHIFT hyp ▭ 3 ▼ 2 ▶ + ▭ 3 √▭ 3 ▼ 2 ▶ ENG ▶ + SHIFT hyp ▭ 3 ▼ 2 ▶ − ▭ 3 √▭ 3 ▼ 2 ▶ ENG =



Vậy $T=9\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 4-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4-3z^2-2=0$. Tính tổng sau :

$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

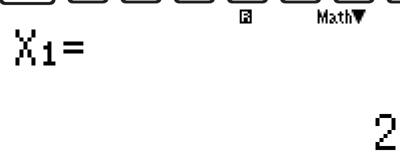
A. 5 **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Đặt $t=z^2$. Tìm nghiệm của phương trình $2t^2-3t-2=0$

MODE 5 3 2 = − 3 = − 2 = =





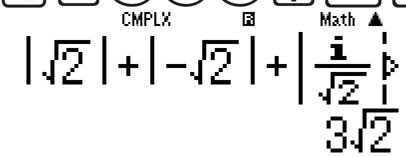
Vậy $\left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} z^2=2 \\ z^2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

- Với $z^2=2\Rightarrow z=\pm\sqrt{2}$

Với $z^2=\dfrac{-1}{2}\Rightarrow z^2=\dfrac{i^2}{2}\Rightarrow z=\pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$

- Tính tổng môđun $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

MODE 2 SHIFT hyp √■ 2 ▶ ▶ + SHIFT hyp − √■ 2 ▶ ▶ + SHIFT hyp ▭ ENG ▼ √■ 2 ▶ ▶ ▶ + SHIFT hyp ▭ − ENG ▼ √■ 2 =



Vậy $T=3\sqrt{2}\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 5-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Xét phương trình $z^3=1$ trên tập số phức . Tập nghiệm của phương trình là :

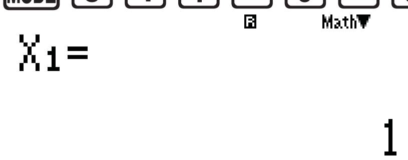
A. $S=\{1\}$ **B.** $S=\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$ **C.** $S=\left\{1;-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **D.** $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

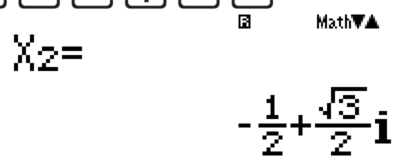
GIẢI

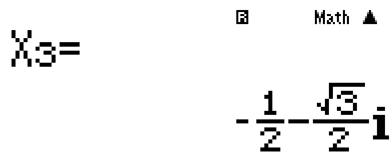
❖ **Cách Casio**

- Giải phương trình bậc ba $z^3-1=0$ với chức năng MODE 54

MODE 5 4 1 = 0 = 0 = − 1 = =







- Phương trình có 3 nghiệm $x_1=1,x_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,x_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 6-Biết z là nghiệm của phương trình $z+\frac{1}{z}=1$. Tính giá trị biểu thức $P=z^{2009}+\frac{1}{z^{2009}}$

A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-\frac{5}{2}$ **D.** $P=\frac{7}{4}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

- Quy đồng phương trình $z+\frac{1}{z}=0$ ta được phương trình bậc hai $z^2-z+1=0$. Tính nghiệm phương trình này với chức năng MODE 5 3

MODE 5 3 1 = − 1 = 1 = =

X1= $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ X2= $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

- Ta thu được hai nghiệm z nhưng hai nghiệm này có vai trò như nhau nên chỉ cần lấy một nghiệm z đại diện là được

Với $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ta chuyển về dạng lượng giác $\Rightarrow z=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

▭ 1 ▼ 2 ▶ + ▭ √▭ 3 ▼ 2 ▶ ENG SHIFT 2 3 =

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ▸r∠θ

$1\angle\frac{1}{3}\pi$

Vậy $\Rightarrow z^{2009}=1^{2009}\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)=\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)$

Tính z^{2009} và lưu và biến A

ON cos 2 0 0 9 × ▭ SHIFT $\times10^x$ ▼ 3 ▶) + ENG sin 2 0 0 9 × ▭ SHIFT $\times10^x$ ▼ 3 ▶) = SHIFT RCL (−)

cos(2009×$\frac{\pi}{3}$)+isi▸ Ans→A

0.5−0.866025403▸ 0.5−0.866025403▸

Tổng kết $P=A+\frac{1}{A}=1$

ALPHA (−) + ▭ 1 ▼ ALPHA (−) =

$A+\frac{1}{A}$

1

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**